UE Théorie spectrale, EDP et mécanique quantique

Niveau d'étude
Bac +4

ECTS
6 crédits

Crédits ECTS Echange
6.0

Composante
UFR IM2AG (informatique, mathématiques et mathématiques appliquées)

Période de l'année
Automne (sept. à dec./janv.)

- **Langue(s) d'enseignement:** Français
- **Ouvert aux étudiants en échange:** Oui
- **Crédits ECTS Echange:** 6.0
- **Code d'export Apogée:** GBMG8U15

Présentation

Description

Le but de ce cours est d'introduire les étudiants aux bases de la théorie spectrale des opérateurs elliptiques sur des domaines, et de voir quelques applications, notamment dans le cadre de la mécanique quantique.

Un des résultats clés du cours sera le fait que le Laplacien avec condition de Dirichlet dans un domaine # borné et lisse de R^d admet une base hilbertienne de fonctions propres régulières e_n vérifiant -# e_n = # $_n e_n$, où # $_n$ # +# avec n# N.

Ce résultat sera un prétexte à l'étude de différents concepts : opérateurs compacts, ou à résolvante compacte, dans les espaces de Hilbert et leur "diagonalisation", espaces de Sobolev H^k(#) et leurs propriétés (injections de Sobolev par exemple), régularité des solutions d'EDP elliptiques.

Dans un second temps, nous souhaitons aussi présenter des applications à la théorie spectrale des opérateurs emblématiques de la mécanique quantique.

Le formalisme mathématique de la mécanique quantique sere présenté, puis nous discuterons le spectre de certains opérateurs de Schrödinger -# +V tels l'oscillateur harmonique ou le Laplacien sur le tore. Nous aborderons également l'existence et les propriétés de fonctions propres associées à la plus basse valeur propre d'un opérateur de Schrödinger en fonction du potentiel V via l'approche variationnelle.

Plus généralement, nous présenterons la caractérisation du spectre d'opérateurs par le min-max des quotients de Rayleigh, ainsi que le théorème de Courant sur le nombre de domaines nodaux des fonctions propres du Laplacien, et l'asymptotique de Weyl pour les valeurs propres sur un domaine. Des exemples simples de problèmes d'optimisation spectrale pourront aussi être présentés en TD, en fonction du temps disponible.

programme préliminaire

- Préliminaires sur les espaces de Hilbert : bases hilbertiennes, Lax-Milgram (en fonction de ce qui sera fait dans le cours du S1).
- Opérateurs compacts. Définition et propriétés du spectre. Théorème spectral pour les opérateurs compacts.
- Espaces de Sobolev H^k(#) sur des ouverts bornés réguliers de R^d, et leurs propriétés.
- Existence d'une base hilbertienne de fonctions propres pour le Laplacien sur un domaine borné régulier.
- Régularité elliptique et régularité des fonctions propres.
- Principes variationnels, min-max pour les valeurs propres.
- Le formalisme de la mécanique quantique : vecteur d'état/fonction d'ondes, opérateur Hamiltonien, évolution/équation de Schrödinger, observable, processus de mesure en mécanique quantique.
- Le spectre de certains opérateurs de Schrödinger -# +V dans R^d et les propriétés de son état fondamental. Exemple de l'oscillateur harmonique, du Laplacien sur le tore, de la particule dans un champ magnétique.
- Un peu de géométrie spectrale : théorème de Courant sur les domaines nodaux, asymptotique de Weyl. Optimisation spectrale dans des cas simples.

Heures d'enseignement

CM	CM	21h
TD	TD	33h

Période : Semestre 8

Bibliographie

Documentation

- H. Brézis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, New York, NY: Springer.
- E. Lieb, M. Loss, Analysis, Graduate Studies in Mathematics, 14, Providence, RI: American Mathematical Society (2001).
- M. Levitin, D. Mangoubi, I. Polterovich, Topics in spectral geometry, à paraître dans Graduate Studies in Math. (AMS), disponible sur la page web de I. Polterovich.
- S.J. Gustafson, I. M. Sigal, Mathematical Concepts in Quantum Mechanics, Universitext Springer, 2ème édition, (2011).

Infos pratiques

Contacts

Responsables pédagogiques

Alain Joye

Campus

- Grenoble - Domaine universitaire