

# UE Probabilités approfondies : chaînes de Markov et mécanique statistique



Niveau d'étude  
Bac +4



ECTS  
6 crédits



Crédits ECTS  
Echange  
6.0



Composante  
UFR IM2AG  
(informatique,  
mathématiques  
et  
mathématiques  
appliquées)



Période de  
l'année  
Printemps (janv.  
à avril/mai)

- > Langue(s) d'enseignement: Français
- > Ouvert aux étudiants en échange: Oui
- > Crédits ECTS Echange: 6.0
- > Code d'export Apogée: GBMG8U14

## Présentation

### Description

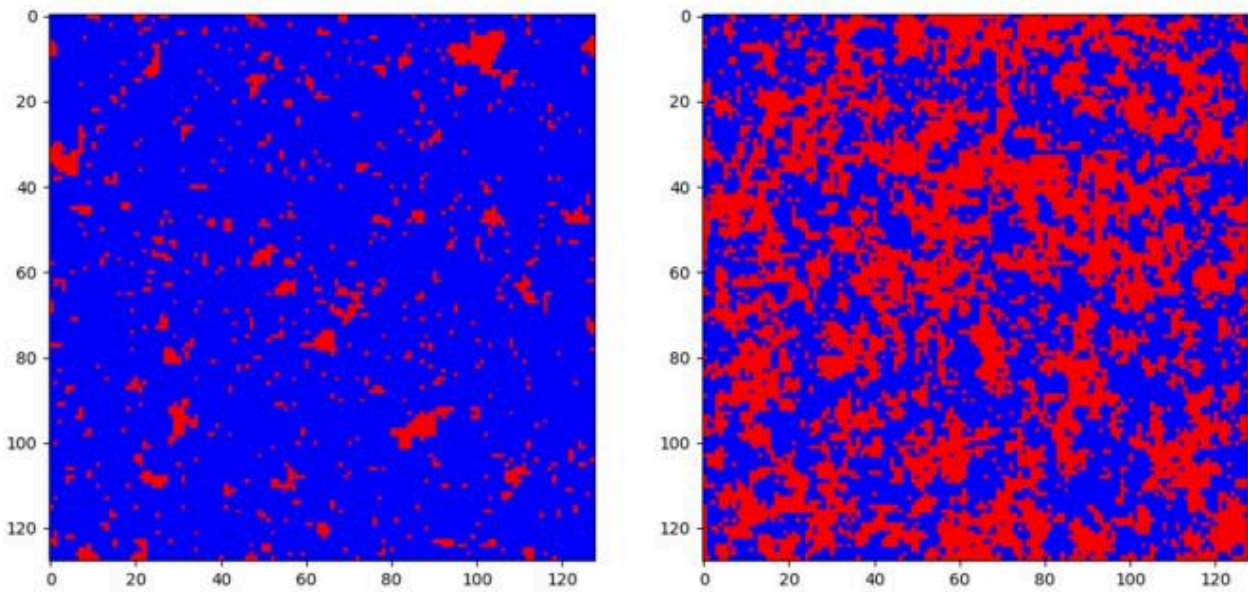
La première partie de l'UE sera consacrée à la théorie des chaînes de Markov en temps discret et à espace d'états discret ; il s'agira donc de couvrir un chapitre initialement prévu au programme de l'UE Probabilités du premier semestre que le manque de temps et les lacunes des étudiant-es concernant le programme de L3 empêchent régulièrement de traiter.

La deuxième partie constituera une introduction à la mécanique statistique, plus particulièrement à l'étude mathématique des transitions de phase dans des modèles sur réseau. On étudiera en détail le cas de référence du modèle d'Ising, l'un des modèles les plus célèbres et les plus étudiés dans ce domaine.

Si le temps le permet, une troisième partie présentera une introduction à des modèles de chaînes de Markov indexées par les arbres (percolation et modèle d'Ising sur des arbres).

**Insertion dans le cursus de master** Une partie du contenu de cette UE est au programme de l'agrégation : traitement complet des chaînes de Markov dans ce cadre, espérances conditionnelles, éventuellement un peu de martingales (convergence de martingales rétrogrades pour l'existence de mesures en volume infini à travers les équations DLR), topologies faibles, etc.

Il peut également servir à renouveler les exemples mobilisables dans ce contexte pour l'option A : conditionnements spatiaux, situations de TCL/non-TCL pour des variables aléatoires non indépendantes (convergence ou non de la magnétisation moyenne à haute température ou à basse température), dynamique de Glauber et algorithme de Metropolis-Hastings, etc. Enfin, il vise à aborder, spécialement dans la troisième partie, des situations de recherche actuelles.



Simulations du modèle d'Ising sur le réseau carré à basse température (à gauche, phase ferromagnétique) et à haute température (à droite, phase paramagnétique)

### Programme prévisionnel

- Partie I. Chaînes de Markov
  - Classification des états
  - Propriété de Markov forte
  - Mesure invariante (conditions d'existence, unicité)
  - Théorème ergodique
- Partie II. Modèle d'Ising
  - Le modèle de Curie-Weiss -- Un modèle sans géométrie
  - Mesures de Gibbs en volume fini
  - Limite thermodynamique -- Pression et magnétisation
  - Le modèle d'Ising sur  $Z$  -- Matrices de transfert
  - Mesures en volume infini

- Fonctions locales et inégalités de corrélation
- Diagramme de phase du modèle d'Ising sur  $Z^d$ ,  $d > 1$
- Critères d'unicité
- Brisure de symétrie à basse température -- Argument de Peierls
- Unicité à haute température
- Unicité en champ magnétique non nul -- Théorème de Lee-Yang
- Partie III. Chaînes de Markov indexées par les arbres
  - Mesures de Gibbs sur les arbres
  - Lois de bord
  - Percolation, Ising
  - Extrémalité et critères de reconstruction

---

## Heures d'enseignement



CM	CM	21h
TD	TD	33h

**Période :** Semestre 8

---

## Bibliographie

### Documentation

- Philippe Barbe et Michel Ledoux, Probabilité L3-M1, ÉDP-Sciences, 2007.
- Sacha Friedli et Yvan Velenik,  Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction, Cambridge University Press, 2017.
- Olivier Garet, Probabilités et Processus Stochastiques : cours et exercices corrigés, 2017.
- Christof Külske,  Stochastic processes on trees, Ruhr Universität Bochum, Lecture notes, 2017 (fichier PDF).
- Jean-Yves Oувrard, Probabilités : Tome 2, Master Agrégation, Cassini, 2019.

## Infos pratiques

---

### Contacts

Responsable pédagogique

Loren Coquille

✉ [loren.coquille@univ-grenoble-alpes.fr](mailto:loren.coquille@univ-grenoble-alpes.fr)



---

## Campus

› Grenoble - Domaine universitaire