UE Probabilités approfondies : chaînes de Markov et mécanique statistique

Niveau d'étude
Bac +4

ECTS
6 crédits

Crédits ECTS Echange
6.0

Composante
UFR Informatique, mathématiques et mathématiques appliquées (IM2AG)

Période de l'année
Printemps (janv. à avril/mai)

Diplômes intégrant cet élément

- Master Mathématiques et applications

Langue(s) d'enseignement: Français
Ouvert aux étudiants en échange: Oui
Crédits ECTS Echange: 6.0
Code d'export Apogée: GBMG8U14

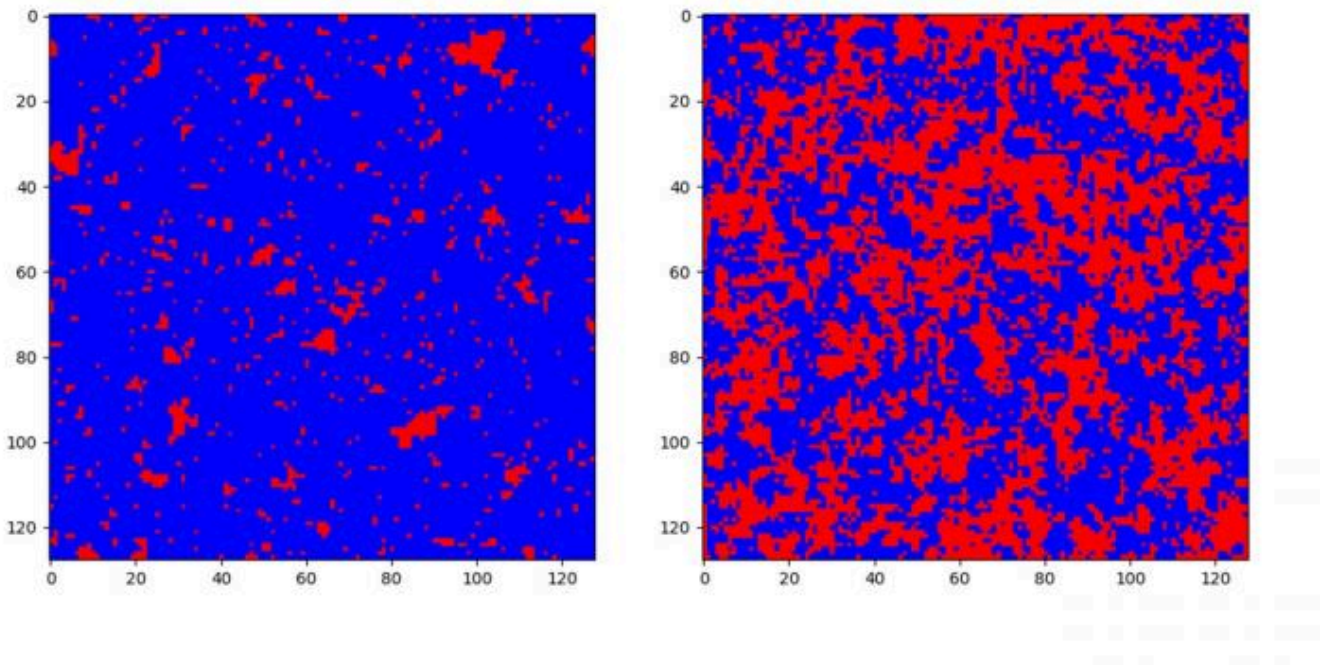
Présentation

Description

La première partie de l'UE sera consacrée à la théorie des chaînes de Markov en temps discret et à espace d'états discret ; il s'agira donc de couvrir un chapitre initialement prévu au programme de l'UE Probabilités du premier semestre que le manque de temps et les lacunes des étudiant·es concernant le programme de L3 empêchent régulièrement de traiter.
La deuxième partie constituera une introduction à la mécanique statistique, plus particulièrement à l'étude mathématique des transitions de phase dans des modèles sur réseau. On étudiera en détail le cas de référence du modèle d'Ising, l'un des modèles les plus célèbres et les plus étudiés dans ce domaine.
Si le temps le permet, une troisième partie présentera une introduction à des modèles de chaînes de Markov indexées par les arbres (percolation et modèle d'Ising sur des arbres).

Informations non contractuelles.
Dernière mise à jour le 30 juin 2026

Insertion dans le cursus de master Une partie du contenu de cette UE est au programme de l'agrégation : traitement complet des chaînes de Markov dans ce cadre, espérances conditionnelles, éventuelle\-ment un peu de martingales (convergence de martingales rétrogrades pour l'existence de mesures en volume infini à travers les équations DLR), topologies faibles, etc.
Il peut également servir à renouveler les exemples mobilisables dans ce contexte pour l'option A : conditionnements spatiaux, situations de TCL/non-TCL pour des variables aléatoires non indépendantes (convergence ou non de la magnétisation moyenne à haute température ou à basse température), dynamique de Glauber et algorithme de Metropolis-Hastings, etc.
Enfin, il vise à aborder, spécialement dans la troisième partie, des situations de recherche actuelles.



Simulations du modèle d'Ising sur le réseau carré à basse température (à gauche, phase ferromagnétique) et à haute température (à droite, phase paramagnétique)

Programme prévisionnel

- Partie I. Chaînes de Markov
  - Classification des états
  - Propriété de Markov forte
  - Mesure invariante (conditions d'existence, unicité)
  - Théorème ergodique
- Partie II. Modèle d'Ising
  - Le modèle de Curie-Weiss -- Un modèle sans géométrie
  - Mesures de Gibbs en volume fini

Informations non contractuelles.
Dernière mise à jour le 30 juin 2026

- Limite thermodynamique -- Pression et magnétisation
- Le modèle d'Ising sur Z -- Matrices de transfert
- Mesures en volume infini
- Fonctions locales et inégalités de corrélation
- Diagramme de phase du modèle d'Ising sur Z^d, d>1
- Critères d'unicité
- Brisure de symétrie à basse température -- Argument de Peierls
- Unicité à haute température
- Unicité en champ magnétique non nul -- Théorème de Lee-Yang

- Partie III. Chaînes de Markov indexées par les arbres
  - Mesures de Gibbs sur les arbres
  - Lois de bord
  - Percolation, Ising
  - Extrémalité et critères de reconstruction

Heures d'enseignement

CM	CM	21h
TD	TD	33h

Période : Semestre 8

Bibliographie

Documentation

- Philippe Barbe et Michel Ledoux, Probabilité L3-M1, ÉDP-Sciences, 2007.
- Sacha Friedli et Yvan Velenik, Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction, Cambridge University Press, 2017.
- Olivier Garet, Probabilités et Processus Stochastiques : cours et exercices corrigés, 2017.
- Christof Külske, Stochastic processes on trees, Ruhr Universität Bochum, Lecture notes, 2017 (fichier PDF).
- Jean-Yves Ouvrard, Probabilités : Tome 2, Master Agrégation, Cassini, 2019.

Infos pratiques

Contacts

Responsable d'UE

Loren Coquille

loren.coquille@univ-grenoble-alpes.fr

Informations non contractuelles.
Dernière mise à jour le 30 juin 2026

Campus

Grenoble - Domaine universitaire

Informations non contractuelles.
Dernière mise à jour le 30 juin 2026