UE Algèbre et Géométrie 1

Niveau d'étude
Bac +3

ECTS
12 crédits

Composante
UFR Informatique, mathématiques et mathématiques appliquées (IM2AG), Département de la licence sciences et technologies (DLST), Département Sciences Drôme Ardèche (DSDA)

Période de l'année
Automne (sept. à dec./janv.)

Diplômes intégrant cet élément

- Licence Mathématiques

Langue(s) d'enseignement: Français

Ouvert aux étudiants en échange: Non

Présentation

Objectifs

Ce cours permet de consolider et approfondir les structures de groupe, anneau et d'espace vectoriel et endomorphismes ainsi que leurs applications à la géométrie. Ceci constitue le cœur du programme d'algèbre et géométrie du CAPES.

Chapitre 1. Groupes

Informations non contractuelles.
Dernière mise à jour le 19 novembre 2026

- Généralités sur les groupes. Définitions, premiers exemples. Groupe symétrique. Morphismes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Groupes monogènes, groupes cycliques. Groupe produit -- groupes d'automorphismes.
- Le groupe symétrique. Support, orbites, décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Exemples de systèmes générateurs de S_n. Signature. Groupe alterné. Application au déterminant d'un endomorphisme de R^n, d'une matrice carrée. Formes n-linéaires alternées.(*)
- Quotients, groupes quotients, Z/nZ. Quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence. Classes d'équivalences. Projection. Classes à gauche. Théorème de Lagrange et conséquences simples. Groupe quotient : le cas abélien. Théorème de factorisation (*).
- Actions de groupes. Actions fidèles, transitives. Orbites, stabilisateurs. Quotient d'un ensemble par une action de groupe. Équation aux classes. Groupe laissant invariante une partie du plan.

Chapitre 2. Anneaux

- Généralités. Définitions, généralités. Binôme de Newton. Inversibles et diviseurs de zéro. Définition d'un corps. Sous-anneaux et morphismes d'anneaux. Anneau de polynômes.
- Idéaux. Définitions, somme de deux idéaux, idéal engendré par une partie, lien avec ppcm et pgcd dans le cas de Z. Quotient d'un anneau par un idéal. Théorème de factorisation des morphismes d'anneaux. Division euclidienne dans Z, théorème de Bézout. Les cas de Z/nZ. Petit théorème de Fermat. Indicatrice d'Euler. Théorème des restes chinois. Calcul de l'indicatrice d'Euler pour un nombre non premier.
- Arithmétique. Algo d'Euclide. Anneau principal. PGCD. Remontée de l'algorithme d'Euclide. Bézout pour les polynômes, et conséquences directe (Gauss...). Polynômes irréductibles, polynômes scindés. Racines. Décomposition en produit d'irréductibles [admise]. Théorème fondamental de l'algèbre [admis]. Polynômes irréductibles dans C[X] et R[X].

Chapitre 3. Algèbre linéaire et polynômes d'endomorphismes

- Sommes directes (de n sous-espaces d'un K-espace vectoriel). Fabriquer une base adaptée à la décomposition d'un K-espace vectoriel de dimension finie en une somme directe. Ici, il s'agit de traiter le cas n sous-espaces, pour montrer l'analogie avec la notion de famille libre, ce qui permet de faire des révisions un peu poussées d'algèbre linéaire. Projections.
- Valeurs propres, vecteurs propres. Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Endomorphismes diagonalisables.
- Polynômes d'endomorphismes. Matrice d'un polynôme d'endomorphisme. Polynômes annulateurs. Idéal annulateur d'un endomorphisme.
- Polynôme caractéristique. Théorème de Cayley-Hamilton. L'idéal annulateur est non réduit à zéro.
- Polynôme minimal. Exemples.
- Réduction des endomorphismes. Lemme des noyaux. Retour sur les endomorphismes diagonalisables. Trigonalisation.
- Dimension de l'annulateur comme sev de K[X]. Description de K[f] comme quotient de K[X] par l'idéal annulateur à l'aide du théorème de factorisation.

(*) Contenu traité seulement si le temps le permet.

Heures d'enseignement

CM	CM	42h
TD	TD	70h
TD	TD	6h

Compétences visées

Informations non contractuelles.
Dernière mise à jour le 19 novembre 2026

À l’issue de ce cours, les étudiantes et étudiants sauront :

- reconnaître les structures de groupe, d'anneau et d'espace vectoriel.
- étudier des exemples de groupes commutatifs ou non commutatifs, et reconnaître des groupes classiques à isomorphisme près.
- résoudre des problèmes d'arithmétique dans les entiers en utilisant les théorèmes de Bézout, Fermat et des restes chinois.
- utiliser l'arithmétique élémentaire des polynômes pour étudier leur factorisation.
- utiliser les outils phares des anneaux euclidiens dans le cadre des anneaux de polynômes.
- réduire un endomorphisme.

Informations non contractuelles.
Dernière mise à jour le 19 novembre 2026