UE Topologie des espaces métriques

Niveau d'étude
Bac +3

ECTS
12 crédits

Crédits ECTS Echange
12.0

Composante
UFR IM2AG (informatique, mathématiques et mathématiques appliquées)

Période de l'année
Printemps (janv. à avril/mai)

- **Langue(s) d'enseignement:** Français
- **Méthodes d'enseignement:** En présence
- **Forme d'enseignement :** Cours magistral
- **Ouvert aux étudiants en échange:** Oui
- **Crédits ECTS Echange:** 12.0
- **Code d'export Apogée:** GBMA5U02
- **Temps de travail personnel pour l'étudiant:** 0

Présentation

Description

Chapitre 1 : Le corps des réels

1. Définition de R et premières propriétés
Ensembles ordonnés, bornes supérieure et inférieure, corps ordonnés. Définition de R comme unique corps ordonné possédant la propriété de la borne supérieure. Propriété d’Archimède, densité de Q dans R.
2. Suites réelles
Notion de convergence, suites croissantes majorées, caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Valeurs d’adhérence, limites supérieure et inférieure d’une suite bornée, théorème de Bolzano-Weierstrass. Suites de Cauchy, complétude. Construction de R.
3. Développement décimal
Définition, existence et unicité du développement décimal propre. Caractérisation décimale de Q.
4. Dénombrabilité

Définitions, dénombrabilité d'un produit fini et d'une union dénombrable d'ensembles dénombrables. Non-dénombrabilité de {0, 1} N et de R.

5. Fonctions réelles

Continuité en un point et sur un sous-ensemble de R, caractérisation séquentielle de la continuité. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment par une application continue.

Continuité uniforme, théorème de Heine sur un segment. Convergences simple et uniforme d'une suite de fonctions, continuité d'une limite uniforme de fonctions continues. Théorèmes de Dini.

Chapitre 2 : Espaces métriques, espaces vectoriels normés, espaces préhilbertiens

1. Espaces métriques

Distance sur un ensemble, exemples d'espaces métriques, diamètre d'une partie, distance d'un point à une partie, inégalité triangulaire inverse.

2. Espaces vectoriels normés

Norme sur un espace vectoriel, exemples d'espaces vectoriels normés, caractérisation des distances associées à une norme. Normes usuelles sur K n , où K = R ou C, inégalités de Young,

de Hölder, et de Minkowski. Equivalence des normes k · k p sur K n pour p # [1, #]. Normes correspondantes sur C([a, b], K), et non-équivalence de celles-ci. Espaces l p .

3. Espaces préhilbertiens

Produit scalaire sur un espace vectoriel, norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme, identité de polarisation. Caractérisation des normes associées à un produit scalaire.

4. Topologie des espaces métriques

Boules ouvertes, boules fermées, ensembles ouverts, ensembles fermés, voisinages. Une union quelconque ou une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Cas des espaces vectoriels normés, invariance de la topologie par translation et dilatation, convexité des boules.

5. Convergence des suites

Définition, unicité de la limite, exemples. Ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite, cas des suites de Cauchy, exemples d'espaces complets ou non. Caractérisation séquentielle des ensembles fermés.

6. Fonction continues

Définition d'une application continue entre deux espaces métriques, critère séquentiel, caractérisation topologique de la continuité (l'image inverse d'un ouvert est ouvert). Compositions, sommes, ou produits d'applications continues. Applications uniformément continues, lipschitziennes. Densité d'une partie, exemples. Image d'une partie dense par une application continue et sujective. Une application continue est univoquement déterminée par sa donnée sur une partie dense.

7. Parties compactes

Définition (par la propriété de Bolzano-Weierstrass), compacité implique complétude, parties compactes de K n . Image d'une partie compacte par une application continue. Equivalence de normes, toutes les normes sur K n sont équivalentes. Exemple de normes non équivalentes en dimension infinie. Une suite dans un compact converge vers l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Equivalence des propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass dans le cas métrique.

8. Homéomorphismes

Définition, ensembles homéomorphes, exemples (classes d'équivalence des intervalles de R).

Propriétés préservées ou non par homéomorphisme. Distances topologiquement équivalentes, distances équivalentes.

9. Aplications linéaires continues

Borne d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés, propriétés. Applications continues, lipschitziennes, espace vectoriel normé des applications linéaires continues. Cas de la dimension finie, exemple d'application linéaire non bornée en dimension infinie. Normes usuelles sur les matrices. Formes linéaires continues, dual topologique d'un espace vectoriel normé.

Une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé. Prolongement d'une application linéaire sur une partie dense.

Chapitre 3 Topologie générale

1. Définitions générales
Topologie sur un ensemble, exemples d'espaces topologiques. Métrisabilité, espace séparable au sens de Hausdorff, voisinages et bases de voisinages. Topologie engendrée par une famille de parties. Topologie induite sur un sous-ensemble, cas des espaces métriques.
2. Limites et continuité
Convergence d'une suite, unicité de la limite dans le cas séparé. Continuité d'une fonction, propriétés. Caractérisation séquentielles (partielles) des ensembles fermés et des applications continues. Transport de topologie par une application, topologie induite (ou initiale) et topologie image (ou finale).
3. Intérieur, adhérence, frontière
Définitions, caractérisations, propriétés élémentaires. Comportement sous les opérations ensemblistes, image ou image inverse par une application continue. Valeurs d'adhérence d'une suite, lien avec l'adhérence de l'ensemble des valeurs de la suite. Parties denses.
4. Produits et quotients
Définition et propriétés de la topologie produit dans le cas d'un nombre fini de facteurs. Les projections canoniques sont continues et ouvertes. Cas des espaces métriques. Produit infini d'espaces topologiques, produit dénombrable d'espaces métriques. Topologie quotient, exemple.
5. Compacité
Parties compactes d'un espace topologique séparé (définies par la propriété de Borel-Lebesgue), propriétés élémentaires, séparation des ensembles compacts disjoints. Théorème de Tykhonov (admis dans le cas général). Un produit dénombrable d'espaces métriques compacts est un espace métrique compact. Séparation des fermés disjoints dans les espaces métriques.
6. Connexité
Définition et caractérisations d'un espace ou d'une partie connexe. Sous-ensembles connexes de R. Conditions suffisantes pour qu'une union de connexes soit connexe. Adhérence et image continue d'une partie connexe. Composantes connexes. Connexité par arcs, ouverts connexes d'un espace vectoriel normé. Connexité simple (facultatif). Exemple de l'ensemble de Cantor.

Chapitre 4 : Compléments et applications.

1. Espaces métriques complets
Théorème de Baire, conséquences (un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable). Suites récurrentes, théorème du point fixe de Banach.
2. Espaces de Banach
Définition, exemples (espaces de suites, espaces de fonctions), démonstration de la complétude.
3. Séries dans les espaces de Banach
Convergence et convergence absolue d'une série dans un espace de Banach. Applications : perturbations d'un endomorphisme inversible, exponentielle d'un endomorphisme, cas particulier
des matrices.
4. Espaces de Hilbert
Projection sur un convexe fermé non vide, projection orthogonale sur un sous-espace fermé, théorème de représentation de Riesz. Familles orthonormées, inégalité de Bessel, bases hilbertiennes dans le cas séparable.
5. Théorème d'Ascoli
Ensembles relativement compacts, familles uniformément équicontinues, théorème d'Ascoli.
6. Théorème de Stone-Weierstrass

Théorème d’approximation de Weierstrass, preuve de Bernstein. Algèbres de fonctions, théorème de Stone-Weierstrass.

Heures d'enseignement

CM	CM	42h
TD	TD	70h

Période : Semestre 5

Infos pratiques

Contacts

Responsable pédagogique

Hervé Pajot

herve.pajot@univ-grenoble-alpes.fr

Lieu(x) ville

- Grenoble

Campus

- Grenoble - Domaine universitaire