UE Théorie de la mesure, introduction aux probabilités

Niveau d'étude
Bac +3

ECTS
12 crédits

Crédits ECTS Echange
0.0

Composante
UFR IM2AG (informatique, mathématiques et mathématiques appliquées)

Période de l'année
Printemps (janv. à avril/mai)

- **Langue(s) d'enseignement:** Français
- **Méthodes d'enseignement:** En présence
- **Forme d'enseignement :** Cours magistral
- **Ouvert aux étudiants en échange:** Oui
- **Crédits ECTS Echange:** 0.0
- **Code d'export Apogée:** GBMA6U02
- **Temps de travail personnel pour l'étudiant:** 0

Présentation

Description

I. Espaces mesurés, espaces probabilisés

Algèbre de parties d'un ensemble E.
Exemple : les unions finis d'intervalles de R. Toute union finie d'intervalles de R peut s'écrire comme union finie d'intervalles disjoints.
Tribus sur un ensemble E. Espace mesurables. Tribu engendrée par une partie de P(E).
Tribu borélienne sur un espace topologique. Classes monotones. Théorème des classes monotones.

II. Mesures positives, probabilités

Définitions et premières propriétés.
Ensembles de mesure nulle. Propriétés vraies presque partout.8

Mesure de Stieltjes associée à une fonction croissante et continue à droite F de R dans R.
On admettra l'existence et on ne montrera que l'unicité à l'aide du théorème des classes monotones.
Mesure des intervalles]a, b], [a, b], [a, b[,]a, b[.
Les mesures boréliennes positives sur R sont exactement les mesures de Stieltjes. Exemples de mesures discrètes, singulières continues, absolument continues (même si l'on ne peut pas encore le montrer). La mesure de Stieltjes associée à F s'obtient comme mesure image de la mesure de Lebesgue sur l'intervalle]F (##); F (+#)[par la fonction pseudo-inverse de F .
Mesure de Lebesgue sur R. Invariance par symétrie et translation.
Exemples de parties de R de mesure de Lebesgue nulle.
Applications mesurables entre deux espaces mesurables. Tribu initiale associée. Mesure image. Exemples.

III. Intégration par rapport à une mesure positive

Intégration des fonctions étagées (à valeurs dans R).
Intégration de fonctions mesurables à valeurs dans [0; +#]. Si l'intégrale est finie, la fonction est finie presque partout. Si l'intégrale est nulle, la fonction est nulle presque partout.
Intégration des fonctions intégrables à valeurs dans R et C.
Le module de l'intégrale est plus petit que l'intégrale du module. Cas d'égalité.
Liens entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue sur R.
Intégration par rapport à une mesure discrète. Intégration par rapport à une mesure à densité (ce point utilise le théorème de Beppo-Lévi).
Théorèmes de Beppo-Lévi, Fatou, convergence dominée. Continuité, dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.
Intégrale indéfinie.

IV. Espaces L^p

(Dans la perspective de l'utilité pour les probabilités)

Définition, inégalités de Holder et de Minkovski.
Toute série de fonctions normalement convergente dans L^p (E, A, µ) converge presque partout et dans L^p (E, A, µ). L'espace de Banach L^p (E, A, µ) est complet.
Densité des fonctions continues à support compact et des fonctions en escalier dans L^p (R^d).
Continuité des translations dans L^p (R^d).

V. Produit de deux espaces mesurés (ou d'un nombre fini)

Espaces, tribus et mesures produits.
Théorème de Fubini.
Mesure de Lebesgue sur R^d . Invariance par isométrie. Effet d'une application linéaire.
Formule de changement de variables (énoncée mais admise). Application à la détermination de mesures images.

VI. Convolution et transformation de Fourier dans R^d

(Dans la perspective de l'utilité pour les probabilités, exemples d'utilisation des théorèmes d'intégration.)

Convolution de deux fonctions dans L^1 (R d).
Densité de C_c^# (R^d) dans L^1 (R^d).
Transformation de Fourier sur L^1 (R^d) (convention \int f(x)e^{ #ix·\xi} dx).
Transformée de Fourier d’un produit de convolution.
Transformée de Fourier de la densité d’une gaussienne centrée.
Formule d’inversion pour f \in L^1 (R^d) telle que Ff soit dans L^1 (R^d).
Formule de Plancherel.
Convolution de deux mesures positives finies. Cas où l’une des deux possède une densité.

VII. Probabilités

1. Vocabulaire probabiliste
– Variable aléatoire, loi, tribu associée.
– Couples de variables aléatoires. Loi jointe et lois marginales.
– Variables aléatoires réelles : fonction de répartition, conditions d’existence d’une densité, espérance.
– Théorème de transfert. Cas de variables aléatoires discrètes Cas de variables aléatoires à valeurs dans R^d et à densité.
– Variance, écart-type, covariance, coefficient de corrélation.
– Probabilité et espérance sachant un événement.
2. Indépendance
– Indépendance de tribus, de variables aléatoires, de n événements, de deux événements.
– Critères pour savoir que des variables aléatoires discrètes sont indépendantes.
– Critères pour savoir que des variables aléatoires réelles sont indépendantes.
– Indépendance et espérance.
– Somme de variables aléatoires indépendantes : loi, variance.
– Loi du zéro-un de Kolmogorov.
3. Variables aléatoires à valeurs dans R^d
– Fonction de répartition.
– Espérance, matrice de covariances.
– Fonction caractéristique.
– La fonction caractéristique détermine la loi. Corollaire : critère d’indépendance des composantes.
– Fonction caractéristique d’une somme de variables aléatoires indépendantes.
– Variables aléatoires gaussiennes.
4. Théorèmes limites
– Théorèmes de Borel-Cantelli
– Convergence presque sûre, en probabilité dans L^p .
– Loi faible et loi forte des grands nombres. Loi forte prouvée seulement pour des variables dans L^4 .
– Convergence en loi. Définitions équivalentes.
– Théorème de Lévy.
– Théorème limite central, théorème de Poisson.

Heures d'enseignement

TD	TD	72h
CM	CM	48h

Infos pratiques

Contacts

Responsable pédagogique

Christophe Leuridan

Lieu(x) ville

- Grenoble

Campus

- Grenoble - Domaine universitaire