UE Topologie des espaces vectoriels normés

Niveau d'étude
Bac +3

ECTS
12 crédits

Crédits ECTS Echange
0.0

Composante
UFR IM2AG (informatique, mathématiques et mathématiques appliquées)

Période de l'année
Automne (sept. à dec./janv.)

- **Langue(s) d'enseignement:** Français
- **Méthodes d'enseignement:** En présence
- **Forme d'enseignement :** Cours magistral
- **Ouvert aux étudiants en échange:** Oui
- **Crédits ECTS Echange:** 0.0
- **Code d'export Apogée:** GBMA5U12
- **Temps de travail personnel pour l'étudiant:** 0

Présentation

Description

Ce cours a pour but d'introduire les notions topologiques de base nécessaires au calcul intégral et au calcul différentiel.

Il a aussi pour but de renforcer les bases du raisonnement, de revoir les fondements de l'analyse réelle et des fonctions continues d'une variable réelle et les généraliser aux fonctions de plusieurs variables réelles.

Préliminaires sur R.

(a) Développement décimal d'un réel. Caractérisation des nombres rationnels.
(b) L'ordre sur R. Le théorème de la borne supérieure : construction de la borne supérieure à l'aide des développements décimaux.
(c) Les suites réelles. Convergence, limite. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Les suites réelles monotones. Le théorème des segments emboités et les suites adjacentes.
(d) Valeurs d'adhérence d'une suite réelle. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

(e) Continuité d'une fonction d'une variable réelle. Critère séquentiel. Théorème des valeurs intermédiaires. Toute fonction f continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes,
(f) Convergence simple et uniforme des suites de fonctions. Limite uniforme de fonctions continues.

Espaces vectoriels normés.
(a) Norme sur un espace vectoriel réel, distance associée. Exemples fondamentaux.
(b) Cas particulier : les produits scalaires. Définition, normes et distances associées. Exemples
(c) Boules et parties bornées d'un espace vectoriel normé.
(d) Suites d'un espace vectoriel normé. Suites convergentes. Suite de R^n.
(e) Parties fermées, parties ouvertes d'un espace vectoriel normé. Intersection et réunion. Adhérence, intérieur d'une partie d'un EVN.
(f) Les parties connexes par arcs d'un EVN (la connexité est hors-programme). Parties connexes par arcs de R.(g) Suites extraites et valeurs d'adhérence. Le théorème de Bolzano-Weierstrass dans R^n.
(h) Parties compactes d'un EVN. Caractérisation en dimension finie.
(i) Parties denses d'un EVN.

3. Fonctions continues entre parties d'un EVN.

(a) Continuité. Critère séquentiel. Exemple : les fonctions lipschitziennes.
(b) Opérations usuelles. Composée, sommes, produits.
(c) Fonctions continues à valeurs dans R^n.
(d) Fonctions continues dont la source est R^n.
(e) Densité et continuité.
(f) Continuité et connexité par arcs.
(g) Compacité et continuité. Equivalence des normes dans R^n.
(h) Homéomorphismes.
(i) Applications linéaires continues, caractérisation, norme.
(j) Fonctions uniformément continues. Définition, exemples, critère séquentiel. Théorème de Heine. Conséquence fondamentale : les fonctions affines par morceaux sur un segment sont denses dans l'espace des fonctions continues muni de la norme infinie.
(k) Théorème de Weierstrass (sans preuve).

4. Complétude.

(a) Suites de Cauchy d'un EVN.
(b) Parties complètes d'un EVN. Exemples : R^n, C([0; 1]; R). Espaces de Banach. Dans un Banach, toute série absolument convergente est convergente. Applications : la convergence normale implique la convergence uniforme, la convergence des intégrales absolument convergentes, exponentielle de matrices.
(c) Le théorème du point fixe pour les applications contractantes. Exemples : résolution de $f(x) = x$ pour les fonctions d'une variable réelle et retour sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$,
méthode de Newton.
(d) Projection orthogonale. Exemple : les séries de Fourier. Les formes linéaires continues dans les Hilbert.
(e) Le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense. Application : une fonction dérivable sur]a ; b] dont la dérivée est bornée se prolonge continuement sur [a ; b].

Heures d'enseignement

TD	TD	70h
CM	CM	42h

Période : Semestre 5

Infos pratiques

Contacts

Responsable pédagogique

Hervé Pajot

herve.pajot@univ-grenoble-alpes.fr

Lieu(x) ville

- Grenoble

Campus

- Grenoble - Domaine universitaire