UE Analyse fonctionnelle

ECTS
6 crédits

Composante
UFR IM2AG (informatique, mathématiques et mathématiques appliquées)

- **Langue(s) d'enseignement:** Français
- **Méthodes d'enseignement:** En présence
- **Forme d'enseignement :** Cours magistral
- **Ouvert aux étudiants en échange:** Non
- **Code d'export Apogée:** GBMG8U04

Présentation

Description

Le but de ce cours est de démontrer les principaux théorèmes qui servent de base à l'analyse dans les espaces de Banach de dimension infinie, et d'en présenter un certain nombre d'applications.

Descriptif

1. Espaces de Banach : exemples classiques, théorèmes de complétude, inégalités fondamentales. Opérateurs linéaires bornés entre deux espaces, formes linéaires, espace dual.
2. Théorème de Hahn-Banach : axiome du choix, lemme de Zorn, et forme analytique du théorème. Bidual d'un espace de Banach, réflexivité. Dual des espaces $\#^p$(N) et L^p(#).
3. Lemme de Baire et théorème de Banach-Steinhaus. Convergence faible d'une suite dans un espace de Banach, et convergence faible-étoile d'une suite dans son dual. Compacité séquentielle faible de la boule unité d'un espace réflexif.
4. Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé. Supplémentaire topologique d'un sous-espace fermé, projecteurs continus, opérateurs inversibles à gauche ou à droite.
5. Introduction à la théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach. Spectre, ensemble résolvant, opérateur résolvant, rayon spectral. Éventuellement : théorie spectrale des opérateurs compacts.

6. Espaces de Sobolev en dimension un. Espaces $H^1(I)$ et $H^1_0(I)$ où I est un intervalle borné : inégalité de Poincaré, injection dans les fonctions continues, caractérisation à l'aide des séries de Fourier. Espace $H^1(R)$, caractérisation à l'aide de la transformée de Fourier. Application à la résolution de problèmes elliptiques en dimension un.

Heures d'enseignement

UE Analyse fonctionnelle - TD	TD	29h
UE Analyse fonctionnelle - CM	CM	19,5h

Pré-requis recommandés

- Le cours repose essentiellement sur la topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés étudiée au premier semestre du L3. Le langage de la topologie générale est également utilisé.
- La théorie de l'intégration vue au second semestre du L3 est nécessaire pour traiter des exemples classiques comme les espaces L^p.
- Les séries de Fourier et la transformation de Fourier, qui figurent au programme du cours *Équations différentielles ordinaires* au premier semestre du M1, interviennent dans l'étude des espaces de Sobolev.

Période : Semestre 8

Bibliographie

Documentation principale

Le contenu du cours est entièrement couvert par l'excellent ouvrage classique de H. Brézis (en version originale française, ou en version anglaise revue et augmentée) ci-dessous.

- Haïm Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983
- Haïm Brézis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, 2011

Documentation supplémentaire

- Daniel Li, Hervé Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach. Analyse et probabilités*, Cours Spécialisés 12, SMF, Paris, 2004
- Joram Lindenstrauss, Lior Tzafriri, *Classical Banach spaces* (2 volumes), Springer, Berlin, 1979
- Michael Reed, Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New-York, 1980
- Walter Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1991 (traduction française, Ediscience, Paris, 1995)

Infos pratiques

Contacts

Responsable pédagogique

Hervé Pajot

herve.pajot@univ-grenoble-alpes.fr

Lieu(x) ville

- Grenoble

Campus

- Grenoble - Domaine universitaire